Programa detallado

Bloque 1. Sintáxis y semántica de primer orden.

Estructuras y lenguajes. Lenguajes de primer orden. L-estructuras: universo e interpretación de los símbolos de L. Subestructuras, extensiones e isomorfismos. Expansiones y reductos de estructuras.

Términos. $Ter(L)$: L-términos; notación $t(x_1, \ldots, x_n)$ y abreviaturas. Función $t^{\mathcal{A}}$ asociada a un término t. Sustitución (simultánea) en términos $t(s_1/x_1, \ldots s_n/x_n)$.

`P.B.(Sustitución y función asociada):` Sean L un lenguaje, $x, y_1, \ldots y_m$ variables, $t(x, \bar{y})$ y $s(x, \bar{y})$ L-términos y $\mathcal{A}$ una L-estructura. Entonces para todo $a, b_1, \ldots, b_m \in A$,

$$(t(s/x))^{\mathcal{A}}(a, \bar{b}) = t^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(a, \bar{b}), \bar{b}).$$

`P.B.(Generador):` Sea $\mathcal{A}$ una L-estructura, sea D un subconjunto de A. Si L tiene al menos una constante ó $D \neq \emptyset$, entonces el conjunto generado por D,

$$\langle D \rangle_{\mathcal{A}} := \{t^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \mid n \in \mathbb{N}, t(x_1, \ldots, x_n) \in Ter(L), a_1, \ldots a_n \in D\}$$

es el universo de una subestructura de $\mathcal{A}$.

Fórmulas. $For(L)$: L-fórmulas atómicas y L-fórmulas. Subfórmulas, variables libres y ligadas, notación $F(x_1, \ldots, x_n)$, enunciados. Abreviaturas. Fórmulas universales y fórmulas existenciales. Cierres universales de una fórmula. Árbol de descomposición de una fórmula y de una fórmula abreviada. Sustitución (simultánea) en fórmulas $F(s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n)$.

Relación de satisfacción. Satisfacción para fórmulas: la n-upla $\bar{a}$ satisface la fórmula F en la estructura $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \models F(\bar{a})$).

`Prop.1.1(`$\models$ `depende solamente de las variables libres).` Sean L un lenguaje y $F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)(= F(x_1, \ldots, x_n))$ una L-fórmula.

Entonces, para cualquier L-estructura $\mathcal{A}$ y para cualesquiera $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ se tiene que

$$\mathcal{A} \models F(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathcal{A} \models (a_1, \ldots, a_n, b_1 \ldots, b_m) \text{ para todo (para algún) } (b_1, \ldots, b_m) \in A^m.$$

Satisfacción de enunciados: el enunciado F se satisface en la estructura $\mathcal{A}$ o $\mathcal{A}$ satisface F ($\mathcal{A} \models F$). Equivalencia elemental ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$).

`Prop.1.2:` Sean L una lenguaje, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos L-estructuras y $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un isomomorfismo y $F(x_1, \ldots, x_n)$ una L-fórmula. Entonces, para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ se tiene

$$\mathcal{A} \models F(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathcal{B} \models F(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n).$$

En particular, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Fórmulas válidas del lenguaje. Conjuntos definibles en una estructura, conjuntos definibles con parámetros.

`P.B.:`Correspondencia entre las operaciones booleanas en los conjuntos definibles y la estructura de las fórmulas.

`Prop.1.3(`$\models$ `y sustitución).` Sea L un lenguaje. Sea $s(x, y_1, \ldots, y_m)$ un L-término, tal que las variables $y_1, \ldots, y_m$ aparecen en s. Sea $F(x, y_1, \ldots, y_m, z_1 \ldots, z_l)$ una L-fórmula en la que x es sustituible por s. Entonces, para toda L-estructura $\mathcal{A}$ y para cualesquiera $(a, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_l) \in A^{1+m+l}$ se tiene

$$\mathcal{A} \models F(s/x)(a, \bar{b}, \bar{c}) \iff \mathcal{A} \models F(s^{\mathcal{A}}(a, \bar{b}), \bar{b}, \bar{c})$$

`Cor.(Cambio de nombre a una variable ligada).`Sean L un lenguaje, $x, z_1, \ldots, z_n$ variables y $G(x, \bar{z})$ una L-fórmula. Sea y una variable $y \neq x, z_1, \ldots, z_n$ que no aparezca en G. Entonces, para toda L-estructura $\mathcal{A}$ y para todo $\bar{c} \in A^n$, se tiene

$$\mathcal{A} \models (\forall y G(y/x))(\bar{c}) \iff \mathcal{A} \models (\forall x G)(\bar{c}).$$

Tautologías. Fórmulas básicas; distribución de valores de verdad (d.v.v.); tautologías; fórmulas tautológicamente equivalentes.

`Prop.1.4:` Sea L un lenguaje. Las tautologías de L son fórmulas válidas de L.

Consecuencia semántica. L-teoría; modelo; la clase de modelos de T (Mod(T)); la teoría de una L-estructura (Teo($\mathcal{A}$)). Consecuencia semántica ($T \models F$) para enunciados, consecuencia semántica para fórmulas. Fórmulas equivalentes con respecto a una teoría. Teorías equivalentes.